**GRAFI DI INCOMPATIBILITA’**

*[Da “I giochi di Archimede” – Gara Biennio, 21 Novembre 2007]*

In un paese abitano solo briganti che mentono sempre, e cavalieri che dicono sempre la verita’. Un giornalista intervista 4 abitanti: Arturo, Bernardo, Carlo e Dario, che fanno le seguenti dichiarazioni. Arturo: “Bernardo e’ un brigante”; Bernardo: “Io sono l’unico cavaliere tra noi 4”; Carlo: “Almeno uno tra Arturo e Dario e’ un brigante”; Dario: “Siamo 4 cavalieri”. Quanti tra i 4 sono cavalieri?

***SOLUZIONE***

Rappresentiamo i 2 casi possibili per ogni intervistato in un grafo che ha quindi 8 vertici. Ogni vertice rappresenta il fatto che uno dei 4 sia un brigante o un cavaliere (e quindi che la sua affermazione sia falsa o sia vera). Indichiamo con A=0 (brigante) e A=1(cavaliere) le due possibilita’ per Arturo e similmente per gli altri. Inseriamo nel grafo uno spigolo tra due vertici quando le 2 corrispondenti possibilita’ sono incompatibili, cioe’ non possono essere vere entrambre. Inizialmente, il grafo ha le 4 ovvie incompatibilita’ tra essere brigante ed essere cavaliere, per ciascuno dei 4.

B=1

B=0

D=0

C=0

A=0

D=1

C=1

A=1

Ora rappresentiamo nel grafo le altre informazioni. Arturo afferma: “Bernardo e’ un brigante.” Quindi e’ impossibile che Arturo dica la verita’ e Bernardo sia un cavaliere ed e’ impossibile che Arturo menta e Bernardo sia un brigante.

A=1

B=1

C=1

D=1

A=0

B=0

C=0

D=0

Bernardo afferma: “Io sono l’unico cavaliere tra noi 4”. Quindi e’ impossibile che Bernardo dica la verita’ e uno qualunque degli altri 3 sia cavaliere.

A=1

B=1

C=1

D=1

A=0

B=0

C=0

D=0

Carlo afferma: “Almeno uno tra Arturo e Dario e’ un brigante”. Dobbiamo in questo caso negare la dichiarazione di Carlo. Infatti se la dichiarazione e’ vera, non ci permette di dedurre nulla su Arturo singolarmente o su Dario singolarmente. La negazione di cio’ che afferma Carlo e’ “Arturo e Dario sono entrambi cavalieri. Quindi se Carlo mente, sia Arturo che Dario sono cavalieri. Quindi e’ incompatibile che Carlo menta e che Arturo sia un brigante ed e’anche incompatibile che Carlo menta e che Dario sia un brigante.

A=1

B=1

C=1

D=1

A=0

B=0

C=0

D=0

Infine Darlo afferma: “Siamo quattro cavalieri”. Quindi e’ incompattibile che Dario dica la verita’ col fatto che chiunque dei 4 sia un brigante.

A=1

B=1

C=1

D=1

A=0

B=0

C=0

D=0

Inserendo tutte le incompatibilita’ insieme nel grafo, otteniamo quindi quanto segue:

C=1

A=1

B=1

D=1

A=0

B=0

C=0

D=0

Su questo grafo cerchiamo un “Indipendence Set” di massima cardinalita’. Se ne troviamo uno di cardinalita’ 4 abbiamo risolto il quiz. E qui si vede ad occhio che e’ il seguente ed e’ anche l’unico:

**A = 1 B = 0 C = 1 D = 0**